Abgeschlossene Untergruppen von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ und die zugeordnete Lie-Algebra

Hans Joachim Ferreau
Christian Kirches

18.06.2003

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **2**
1.1 Motivation . . . 2
1.2 Bezeichnungen . . . 2
1.3 Definitionen . . . 2
1.4 Wichtige Fakten . . . 3

2 Satz **4**
2.1 Satz und Beweis (erster Teil) . . . 4
2.2 Hilfslemmata . . . 5
2.3 Beweis (zweiter Teil) . . . 7

3 Beispiele **8**
3.1 $\mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$, $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})^+$, AN, N . . . 8
3.2 $\mathrm{O}(n, \mathcal{B})$, $\mathrm{U}(n, \mathcal{B})$ . . . 9
3.3 Offene Untergruppe von G . . . 10

1 Einleitung

1.1 Motivation

Bekanntlich kann man jeder abgeschlossenen Untergruppe G von $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ eine Lie-Algebra $\mathfrak{g} = \mathbf{L}(G)$ zuordnen. Man kann dies nutzen, um Eigenschaften von G aus Eigenschaften von $\mathfrak{g}$ abzuleiten. Ziel dieses Vortrages ist es, anhand der Lie-Algebra von G zu beweisen, dass jede abgeschlossene Untergruppe von $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ *lokal* wie ein Vektorraum aussieht.

1.2 Bezeichnungen

$\mathbb{K} \ := \ \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$

$\mathbf{0} \in \mathrm{M}(n,\mathbb{K})$ (Nullmatrix)

$\mathbf{1} \in \mathrm{M}(n,\mathbb{K})$ (Einheitsmatrix)

$\mathfrak{g} \ = \ \mathbf{L}(G) \ := \ \{X \in \mathrm{M}(n,\mathbb{K}) : \exp(\mathbb{R}X) \subseteq G\}$ (Lie-Algebra von G)

$\mathrm{gl}(n,\mathbb{K})$ (Lie-Algebra von $\mathrm{M}(n,\mathbb{K})$)

$U_r(A) \ := \ \Big\{X \in \mathrm{M}(n,\mathbb{K}) : \|X - A\|_{op} < r\Big\}, \quad r > 0$

$Tr(X) \ := \ \sum_{i=1}^n x_{ii}$ (Spur von $X = (x_{ij}) \in \mathrm{M}(n,\mathbb{K})$)

1.3 Definitionen

Definition 1.1 *Seien X und Y metrische Räume. Eine bijektive stetige Abbildung $f : X \to Y$, deren Umkehrabbildung ebenfalls stetig ist, heißt **Homöomorphismus** von X auf Y.*

Definition 1.2 *Seien X und Y endlich-dimensionale normierte $\mathbb{K}$-Vektorräume. Eine bijektive $\mathcal{C}^1$-Abbildung $f : U \to V$ einer offenen Menge $U \subset X$ auf eine offene Menge $V \subset Y$ heißt **Diffeomorphismus**, wenn ihre Umkehrabbildung ebenfalls eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung ist.*

Definition 1.3 *Auf dem Vektorraum $M(n,\mathbb{K})$ der $(n \times n)$-Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{K}$ ist die **Operatornorm** durch*

$$\|M\|_{op} := \sup\{\|Mv\|_2 : \ v \in \mathbb{K}^n, \ \ \|v\|_2 \leq 1\}$$

bezüglich der euklidischen Norm $\| \cdot \|_2$ auf $\mathbb{K}^n$ definiert. Im Folgenden sind alle Umgebungen solche bezüglich der Operatornorm.

Definition 1.4 *Die **Exponentialfunktion** ist für alle $X \in M(n,\mathbb{K})$ definiert durch die Exponentialreihe*

$$\exp(X) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!}$$

Definition 1.5 *Der **Logarithmus** ist für alle $X \in U_1(\mathbf{1}) \subset M(n,\mathbb{K})$ definiert durch*

$$\log(X) := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(X-\mathbf{1})^k}{k}$$

In $U_1(\mathbf{1})$ ist er die Umkehrfunktion von $\exp$.

Definition 1.6 *Eine $\mathbb{K}$-Lie-Algebra ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum L zusammen mit einer bilinearen Abbildung $[\ ,\ ]: L \times L \to L$ mit*

- $[X,Y] = -[Y,X] \quad \forall\ X,Y \in L$
- $[X,[Y,Z]] = [[X,Y],Z] + [Y,[X,Z]] \quad \forall\ X,Y,Z \in L$ *(Jacobi-Identität)*

Man rechnet leicht nach, dass $M(n,\mathbb{K})$ mit $[X,Y] := XY - YX$ eine Lie-Algebra ist. Sie wird mit $gl(n,\mathbb{K})$ bezeichnet.

1.4 Wichtige Fakten

In diesem Abschnitt sind einige Fakten (ohne Beweis) aufgeführt, die im Folgenden als bekannt vorausgesetzt werden.

Faktum 1.7 *Sowohl die in 1.4 definierte Exponentialfunktion, als auch der in 1.5 definierte Logarithmus sind differenzierbar (und damit stetig).*

Faktum 1.8 *Das Differential $d\exp(\mathbf{0}): M(n,\mathbb{K}) \to M(n,\mathbb{K})$ der Exponentialfunktion in $\mathbf{0}$ ist die Identität.*

Faktum 1.9 *Es existiert eine Umgebung U von $\mathbf{0} \in M(n,\mathbb{K})$ für die die Einschränkung*

$$\exp|_U : U \to \exp(U) \subset GL(n,\mathbb{K})$$

ein Diffeomorphismus (also insbesondere auch ein Homöomorphismus) ist.

Faktum 1.10 *Die Exponentialfunktion besitzt folgende weitere Eigenschaften ($X,Y \in M(n,\mathbb{K})$):*

1. $\exp(X)\exp(Y) = \exp(X+Y)$*, falls* $XY = YX$
2. $G\exp(X)G^{-1} = \exp(GXG^{-1})$*, falls* $G \in GL(n,\mathbb{K})$
3. $\exp(-X) = \exp(X)^{-1}$
4. $\exp(X^T) = \exp(X)^T$*, falls* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *(und* $\exp(X^H) = \exp(X)^H$*, falls* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$*)*
5. $\det(\exp(X)) = e^{Tr(X)}$

Faktum 1.11 *Sei G eine abgeschlossene Untergruppe von $GL(n,\mathbb{K})$ und*

$$\mathfrak{g} = \boldsymbol{L}(G) := \{X \in M(n,\mathbb{K}) : \ \exp(\mathbb{R}X) \subseteq G\}$$

Dann gilt:

- $\mathfrak{g}$ *ist ein Vektorraum*
- $[X,Y] = XY - YX \in \mathfrak{g} \quad \forall\ X,Y \in \mathfrak{g}$

2 Satz

2.1 Satz und Beweis (erster Teil)

Satz 2.1 *Sei G eine abgeschlossene Untergruppe von $GL(n,\mathbb{K})$. Dann existiert eine Umgebung V von $\mathbf{0}$ in $\mathfrak{g}$ und eine Umgebung W von $\mathbf{1}$ in G für die die Abbildung*

$$\exp|_V : V \to W$$

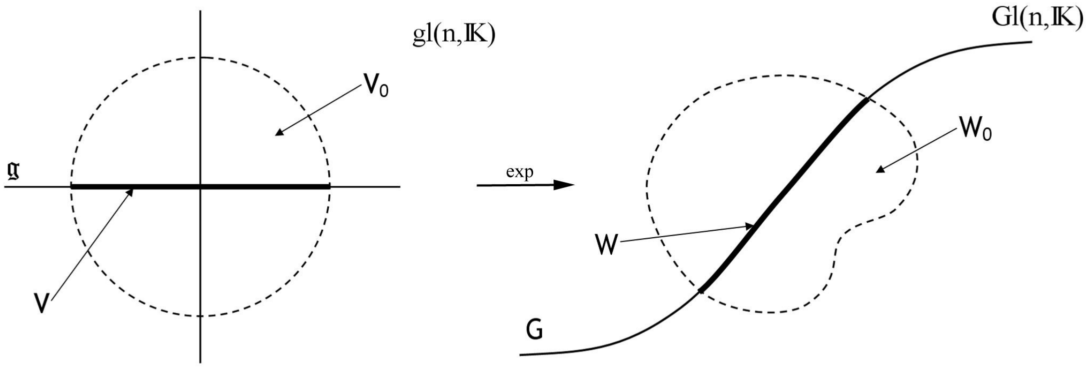
ein Homöomorphismus ist.

Beweis. Falls $G = \{\mathbf{1}\}$, dann ist $\mathfrak{g} = \{\mathbf{0}\}$ und die Aussage trivial. Sei also im Folgenden $G \neq \{\mathbf{1}\}$. Dann existieren gemäß Faktum 1.9 Umgebungen V_0 von $\mathbf{0}$ in $\mathrm{gl}(n,\mathbb{K})$ (Definition 1.6) und $W_0 := \exp(V_0)$ von $\mathbf{1}$ in $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ so, dass

$$\exp|_{V_0} : V_0 \to W_0 \tag{2.1}$$

ein Homöomorphismus (sogar ein Diffeomorphismus) ist. Denn V_0 ist eine Umgebung von $\mathbf{0}$ und enthält somit eine offene Kugel $U_r(\mathbf{0})$ die vom Homöomorphismus auf eine offene Menge $U \subseteq W_0$ abgebildet wird. Und wegen $\exp(\mathbf{0}) = \mathbf{1} \in U$ existiert eine offene Kugel $U'_{r'}(\mathbf{1}) \subseteq U$ und W_0 ist eine Umgebung von $\mathbf{1}$ in $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$.
Daraus ergibt sich unmittelbar:

1. $(V_0 \cap \mathfrak{g}) \subset \mathrm{M}(n,\mathbb{K})$ ist Umgebung der $\mathbf{0}$ in $\mathfrak{g}$
2. $(W_0 \cap G) \subset \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ ist Umgebung der $\mathbf{1}$ in G
3. $\exp(V_0 \cap \mathfrak{g}) \subseteq W_0 \cap G \quad (X \in \mathfrak{g} \Rightarrow \exp(X) \in G)$
4. $\exp|_{(V_0 \cap \mathfrak{g})}$ ist injektiv $\quad$ (da $\exp|_{V_0}$ injektiv)



Wenn wir zeigen können, dass $\exp|_{(V_0 \cap \mathfrak{g})}$ außerdem surjektiv ist, also $\exp(V_0 \cap \mathfrak{g}) = W_0 \cap G$ gilt, dann sind wir wegen der Stetigkeit von exp und log (Faktum 1.7) fertig. Für diesen Nachweis müssen wir allerdings etwas ausholen.

2.2 Hilfslemmata

Lemma 2.2 *Sei $g_k \to \mathbf{1}$ eine konvergente Folge in G mit $g_k \neq \mathbf{1}$ $\forall$ $k \in \mathbb{N}$, dann liegt jeder Häufungspunkt der Menge*

$$M := \left\{ \frac{\log(g_k)}{\|\log(g_k)\|_{op}},\ k \in \mathbb{N} \right\} \subseteq gl(n, \mathbb{K})$$

in $\mathfrak{g}$.

Beweis. X ist genau dann ein Häufungspunkt der Menge M, wenn eine Folge $(m_k) \in M$ existiert, die gegen X konvergiert. Sei o.B.d.A. (man könnte auch eine beliebige Teilfolge (m'_k) nehmen)

$$m_k := \frac{\log(g_k)}{\|\log(g_k)\|_{op}} \quad \text{mit } m_k \to X \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{K}) \text{ für } k \to \infty$$

eine solche Folge mit Grenzwert X, dann folgt zusammen mit der Stetigkeit von exp

$$\exp(tX) = \lim_{k \to \infty} \exp\left(t \frac{\log(g_k)}{\|\log(g_k)\|_{op}} \right) \quad \forall\ t \in \mathbb{R}$$

Wir setzen $A_k := \log(g_k) \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{K})$ und $r_k := \frac{t}{\|log(g_k)\|_{op}} \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$\exp(tX) = \lim_{k \to \infty} \exp(r_k A_k) \quad \forall\ t \in \mathbb{R}$$

Definieren wir weiter $[r_k] := \max\{z \in \mathbb{Z} :\ z \leq r_k\}$, so kann man den Ausdruck weiter umformen:

$$\exp(tX) = \left(\lim_{k \to \infty} \exp([r_k] A_k) \right) \cdot \left(\lim_{k \to \infty} \exp((r_k - [r_k]) A_k) \right) \quad \forall\ t \in \mathbb{R}$$

Der zweite Faktor wird jedoch $\mathbf{1}$, weil

$$\|(r_k - [r_k]) A_k\|_{op} = |r_k - [r_k]| \cdot \|A_k\|_{op} \leq \underbrace{\|A_k\|_{op} \to 0}_{\text{da } \log(\mathbf{1}) = \mathbf{0}} \text{ (für } k \to \infty)$$

Da G eine Gruppe ist, folgt schließlich

$$\exp(tX) = \lim_{k \to \infty} \exp([r_k] A_k) = \lim_{k \to \infty} \exp(A_k)^{[r_k]} = \lim_{k \to \infty} (g_k)^{[r_k]} \in G \quad \forall\ t \in \mathbb{R}$$

Und somit per definitionem $X \in \mathfrak{g}$.

□

Lemma 2.3 *Es existiert eine Umgebung* $U^\perp$ *von* $\mathbf{0}$ *in* $\mathfrak{g}^\perp$ *mit*

$$\exp(U^\perp) \;\cap\; G \;=\; \{1\}$$

Dabei ist $\mathfrak{g}^\perp$ *ein Vektorraum mit* $gl(n,\mathbb{K}) = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^\perp$.

Beweis. Wir nehmen an, dass so eine Umgebung nicht existiert und führen dies zum Widerspruch. Dann besitzt jede (o.B.d.A. kompakte und konvexe) Umgebung $U_*^\perp$ von $\mathbf{0}$ in $\mathfrak{g}^\perp$ die Eigenschaft

$$\exp\left(\frac{U_*^\perp}{k}\right) \cap G \neq \{1\} \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

Wir definieren dann eine Folge

$$g_k \in \exp\left(\frac{U_*^\perp}{k}\right) \cap G \backslash \{1\}$$

und beachten, dass die Voraussetzungen

$$g_k \;\to\; \mathbf{1}, \quad g_k \in G, \quad g_k \neq \mathbf{1} \;\forall\, k \in \mathbb{N}$$

von Lemma 2.2 erfüllt sind und außerdem noch

$$\log(g_k) \in U_*^\perp \subset \mathfrak{g}^\perp$$

gilt. Für einen beliebigen Häufungspunkt X der Menge

$$\left\{ \frac{\log(g_k)}{\|\log(g_k)\|_{op}} \right\}$$

folgt damit sofort

$$X \in \mathfrak{g} \quad \wedge \quad \underbrace{X \in \mathfrak{g}^\perp}_{\mathfrak{g}^\perp \text{ abgeschlossen}} \quad \Longrightarrow \quad X = \mathbf{0} \iff \|X\|_{op} = 0$$

Nach Konstruktion muss aber für die (stetige) Operatornorm von X

$$\|X\|_{op} = \left\| \frac{\log(g_k)}{\|\log(g_k)\|_{op}} \right\|_{op} = \frac{1}{\|\log(g_k)\|_{op}} \cdot \|\log(g_k)\|_{op} = 1$$

gelten. Widerspruch.

□

Lemma 2.4 *Sei $M(n,\mathbb{K}) = V_1 \oplus \ldots \oplus V_m$ eine Vektorraumzerlegung und die Abbildung*

$$\begin{array}{rrcl} \Phi: & V_1 \times \ldots \times V_m & \to & GL(n,\mathbb{K}) \\ & (X_1,\ldots,X_m) & \mapsto & \exp(X_1)\cdots\exp(X_m) \end{array}$$

gegeben, dann gilt: $d\Phi(\mathbf{0},\ldots,\mathbf{0}) = id$. Φ ist also in einer Umgebung der $\mathbf{0}$ stetig differenzierbar.

Beweis. Die m-fache Matrizenmultiplikation ist eine m-lineare Abbildung

$$\begin{array}{rrcl} \mu_m: & \mathrm{M}(n,\mathbb{K}) \times \ldots \times \mathrm{M}(n,\mathbb{K}) & \to & \mathrm{M}(n,\mathbb{K}) \\ & (X_1,\ldots,X_m) & \mapsto & X_1\cdots X_m \end{array}$$

Sie ist stetig differenzierbar und für ihr Differential gilt mit der allgemeinen Produktregel (vgl. hierzu [3], S. 94f.):

$$d\mu_m(X_1,\ldots,X_n)(Y_1,\ldots,Y_n) = (Y_1X_2\cdots X_n) + \ldots + (X_1\cdots X_{n-1}Y_n)$$

Aus Faktum 1.8 folgt damit

$$d\Phi(\mathbf{0},\ldots,\mathbf{0})(Y_1,\ldots,Y_n) = d\mu_m(\mathbf{1},\ldots,\mathbf{1})(Y_1,\ldots,Y_n) = Y_1 + \ldots + Y_n = \underbrace{(Y_1,\ldots,Y_n)}_{\text{bezgl. Standardbasis}}$$

$$\Longrightarrow \quad d\Phi(\mathbf{0},\ldots,\mathbf{0}) = id$$

$\square$

2.3 Beweis (zweiter Teil)

Wir können jetzt den Beweis von Satz 2.1 abschließen:
Wir zerlegen $\mathrm{gl}(n,\mathbb{K}) = \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^\perp$ und definieren die Abbildung

$$\begin{array}{rrcl} \Phi: & \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^\perp & \to & \mathrm{GL}(n,\mathbb{K}) \\ & (X, X^\perp) & \mapsto & \exp(X)\exp(X^\perp) \end{array}$$

Nach Lemma 2.3 existieren Umgebungen

$$V := V_0 \cap \mathfrak{g} \text{ der } \mathbf{0} \text{ in } \mathfrak{g} \quad \text{und} \quad V^\perp := V_0 \cap \mathfrak{g}^\perp \subseteq U^\perp \text{ der } \mathbf{0} \text{ in } \mathfrak{g}^\perp$$

so, dass

$$\Phi|_{V\times V^\perp}: \; V \times V^\perp \; \to \; W_0$$

ein Homöomorphismus ist (nach Lemma 2.4 sogar ein Diffeomorphismus).
Man beachte außerdem noch $\exp(V) = \Phi(V \times \{\mathbf{0}\}) \subseteq W_0 \cap G$.

Wegen der Bijektivität von Φ kann man nun jedes $Y \in W_0 \cap G$ in der Form

$$Y = \exp(X)\exp(X^\perp) \quad \text{mit } X \in V,\; X^\perp \in V^\perp$$

darstellen und es folgt

$$\underbrace{\exp(X^\perp)}_{\in \exp(V^\perp)} = \underbrace{(\exp(X))^{-1}Y}_{\in G} \in \underbrace{\exp(V^\perp) \cap G = \{1\}}_{\text{Lemma 2.3}} \iff Y = \exp(X)$$

Damit ist gezeigt, dass $\exp|_{(V_0\cap\mathfrak{g})}$ auch surjektiv ist. Setzt man jetzt noch $W := W_0 \cap G$, so ist der Satz bewiesen.

$\square$

3 Beispiele

Bevor wir einige Beispiele behandeln, formulieren wir als Konsequenz von Satz 2.1 ohne Beweis folgendes

Korollar 3.1 *Jede abgeschlossene Untergruppe* G *von* $GL(n,\mathbb{K})$ *ist eine* $\mathbb{R}$*-Untermannigfaltigkeit von* $M(n,\mathbb{K})$ *der Dimension* $\dim_{\mathbb{R}} \boldsymbol{L}(G)$.

3.1 SL$(n,\mathbb{K})$, GL$(n,\mathbb{K})^+$, AN, N

Die spezielle lineare Gruppe

$$\mathrm{SL}(n,\mathbb{K}) := \{g \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K}) : \det g = 1\}$$

hat die zugehörige Lie-Algebra

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g} = \mathbf{L}(SL) &:= \{X \in \mathrm{gl}(n,\mathbb{K}) : \det(\exp(tX)) = 1 \ \forall\ t \in \mathbb{R}\} \\
&= \left\{X \in \mathrm{gl}(n,\mathbb{K}) : e^{tTr(X)} = 1 \ \forall\ t \in \mathbb{R}\right\} \quad \text{(gemäß Faktum 1.10)} \\
&= \{X \in \mathrm{gl}(n,\mathbb{K}) : Tr(X) = 0\}
\end{aligned}$$

Die Gruppe

$$\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})^+ := \{g \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K}) : \ \det g > 0\}$$

hat die zugehörige Lie-Algebra

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g} = \mathbf{L}(GL^+) &:= \{X \in \mathrm{gl}(n,\mathbb{K}) : \det(\exp(tX)) > 0 \ \forall\ t \in \mathbb{R}\} \\
&= \left\{X \in \mathrm{gl}(n,\mathbb{K}) : e^{tTr(X)} > 0 \ \forall\ t \in \mathbb{R}\right\} \quad \text{(gemäß Faktum 1.10)} \\
&= \mathrm{gl}(n,\mathbb{K})
\end{aligned}$$

Der Gruppe der oberen Dreiecksmatrizen

$$\mathrm{AN} := \{g \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K}) : \ g_{ij} = 0 \ \forall\ i > j\}$$

ist die Lie-Algebra

$$\mathfrak{g} = \mathbf{L}(AN) = \{X \in \mathrm{gl}(n,\mathbb{K}) : \ x_{ij} = 0 \ \forall\ i > j\}$$

zugeordnet, denn ist X eine obere Dreiecksmatrix, so ist

$$\exp(tX) = \mathbf{1} + tX + \frac{t^2}{2}X^2 + \ \ldots$$

für beliebiges $t \in \mathbb{R}$ als Summe von oberen Dreiecksmatrizen ebenfalls eine obere Dreiecksmatrix. Aus Korollar 3.1 folgt, dass die oberen Dreiecksmatrizen auch wirklich ganz $\mathbf{L}(AN)$ ausmachen.

Analog ist der Gruppe der normierten oberen Dreiecksmatrizen

$$\mathrm{N} := \{g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) : \; g_{ij} = 0 \;\forall\; i > j, g_{ii} = 1\}$$

die Lie-Algebra

$$\mathfrak{g} = \mathbf{L}(N) = \{X \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{K}) : \; x_{ij} = 0 \;\forall\; i \geq j\}$$

zugeordnet, denn ist X eine strikte obere Dreiecksmatrix, so ist

$$\exp(tX) = \mathbf{1} + tX + \frac{t^2}{2} X^2 + \ldots$$

für beliebiges $t \in \mathbb{R}$ als Summe der Einheitsmatrix und einer Summe von strikten oberen Dreiecksmatrizen eine normierte obere Dreiecksmatrix ist. Und wieder folgt aus Korollar 3.1, dass die strikten oberen Dreiecksmatrizen ganz $\mathbf{L}(N)$ ausmachen, da sie isomorph zu N sind.

3.2 $\mathbf{O}(n, \mathcal{B})$, $\mathbf{U}(n, \mathcal{B})$

Die reelle orthogonale Gruppe bezüglich $\mathcal{B}$ ist definiert durch

$$\mathrm{O}(n, \mathcal{B}) := \{X \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) : \; \mathcal{B}(Xv, Xw) = \mathcal{B}(v, w) \;\forall\; v, w \in \mathbb{R}^n\}$$

dabei ist

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{B} : \; \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ (v, w) & \mapsto & v^T B w \end{array}$$

eine bilineare Abbildung mit zugehöriger Matrix B.
Es gilt

$$\mathfrak{g} = \mathbf{L}(O) = \left\{X \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{K}) : \; X^T B + BX = 0\right\}$$

Beweis.
Wie man leicht zeigt, gilt

$$X \in \mathrm{O}(n, \mathcal{B}) \quad \Longleftrightarrow \quad X^T B X = B \qquad (*)$$

$\subseteq$: Für festes $X \in \mathbf{L}(G)$ (also $\exp(rX) \in \mathrm{O}(n, \mathcal{B}) \;\forall\; r \in \mathbb{R}$) betrachten wir die Funktion

$$\begin{array}{rcl} \phi_X : \; \mathbb{R} & \to & \mathrm{M}(n, \mathbb{K}) \\ r & \mapsto & \underbrace{\exp(rX^T)}_{\exp(rX)^T} B \exp(rX) \end{array}$$

Wegen $(*)$ ist $\phi_X(r) = B = \mathit{const.} \;\forall\; r \in \mathbb{R}$. Und somit gilt für die Ableitung

$$\phi_X'(r) = d\exp(r)(X^T) \cdot B \cdot \exp(rX) + \exp(rX^T) \cdot B \cdot d\exp(r)(X) = 0 \quad \forall\; r \in \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow \quad \phi_X'(0) = X^T \cdot B \cdot \mathbf{1} + \mathbf{1} \cdot B \cdot X = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad X^T B + BX = 0$$

$\supseteq$: Gilt umgekehrt für ein $X \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{R})$

$$X^T B + BX = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad rX^T B = -rBX \quad \Longleftrightarrow \quad rX^T = B(-rX)B^{-1}$$

also nach Faktum 1.10

$$\exp(rX)^T = \exp(rX^T) = \exp(B(-rX)B^{-1}) = B\exp(-rX)B^{-1} = B\exp(rX)^{-1}B^{-1}$$

$$\iff \quad \exp(rX)^T B\exp(rX) = B \;\forall\, r \in \mathbb{R}$$

und damit

$$\exp(rX) \in \mathrm{O}(n,\mathcal{B}) \;\forall\, r \in \mathbb{R} \quad \iff \quad X \in \mathbf{L}(G)$$

$\square$

Anmerkung: Ist $\mathcal{B}$ das Standardskalarprodukt mit $B = \mathbf{1}$, so ist die Lie-Algebra die Menge aller schiefsymmetrischen reellen Matrizen.

Sei analog $\mathcal{B}$ eine sesquilineare Abbildung mit einer Matrix B und $\mathrm{U}(n,\mathcal{B})$ die unitäre Gruppe bezüglich $\mathcal{B}$, dann gilt

$$\mathfrak{g} = \mathbf{L}(U) = \left\{X \in \mathrm{gl}(n,\mathbb{K}) :\; X^H B + BX = 0\right\}$$

3.3 Offene Untergruppe von G

Sei G_1 eine offene Untergruppe von G, so gilt

$$\mathbf{L}(G_1) = \mathbf{L}(G)$$

Ohne *Beweis.*

Literatur

[1] Fischer, G.: *Lineare Algebra.* Vieweg, Wiesbaden (2002).

[2] Hilgert, J.; Neeb, K.-H.: *Lie-Gruppen und Lie-Algebren.* Vieweg, Wiesbaden (1991).

[3] Königsberger, K.: *Analysis 2.* Springer, Heidelberg (2000).